# Çok Amaçlı Optimizasyon Problemlerinde Pareto Optimal Kullanımı

**Serkan KAYA**[1]
Harran Üniversitesi

**Nilgün FIĞLALI**
Kocaeli Üniversitesi

Günümüz gerçek yaşam problemlerinde birden fazla amaca sahip optimizasyon problemleriyle karşılaşırız. Çok amaçlı optimizasyon problemlerini çözmek tek amaçlı optimizasyon problemlerine göre daha zordur. Çok amaçlı optimizasyon problemlerinde özellikle birbiriyle çelişen amaçlar olması durumunda problemin zorluk derecesi daha da artmaktadır. Amaçlardan biri maksimize edilmeye çalışılırken diğer bir amacın minimize edilmeye çalışılması problemin karmaşıklığını daha da arttırmaktadır. Çok amaçlı optimizasyon problemlerinde, karar probleminin modeli kurulurken amaç fonksiyonunun oluşturulması zor olabilir. Karar problemlerinin bir çoğunda çözümün kalitesini değerlendirmek için birden fazla kriter söz konusudur. Bu kriterleri tek bir amaç fonksiyonunda toplamak her zaman olanaklı olmayabilir. Birden fazla kriterin söz konusu olduğu, özellikle bu kriterlerin birbirleriyle çeliştiği problemlerde farklı çözüm alternatifleri söz konusu olur.
Çok amaçlı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan klasik yöntemlerden bir tanesi, performans kriterinde amaçların birleştirilmesidir. Farklı amaçlar, bir değerde birleştirilerek çok amaçlı problem, tek amaçlı problem haline getirilerek çözüm yapılır. Tek performans altında toplamak için en çok kullanılan yöntem ise, her bir amacın ağırlıklandırılarak tek amaç fonksiyonu haline getirilmesidir. Çok amaçlı problemlerin çözümünde kullanılan ikinci yöntem olarak, amaçların her seferinde değiştirilerek çözümler elde edilmesidir. Her çözümde amaç fonksiyonu değiştirilerek, kalan diğer amaçların kısıt haline getirilmesi ile tek amaçlı problem gibi çözülmesidir. Amaçlar arasındaki tercih sırasının doğru belirlenmesi, çözüm sürecini etkileyeceğinden dolayı önemlidir. Çok amaçlı optimizasyon problemlerinde kullanılan üçüncü yöntem ise pareto optimal yöntemidir. Burada, tüm amaçları içeren bir vektör ve çözümler arasında tercih yapmayı sağlayan baskınlık kavramı ortaya çıkmaktadır. Çok amaçlı problemlerin çözümünde pareto optimizasyonu tekniğini kullanarak çeşitli çözüm kümesi elde etme çalışmaları diğer yöntemlere göre oldukça azdır. Bu çalışmada, çok amaçlı optimizasyon problemlerinde karar vericinin sonuçlar içinden tercihini yapabilmesini sağlayan pareto baskınlık kavramı sunulmuştur. Örnek problem üzerinde uygulama yapılarak bu yöntemin üstün yanları ortaya konmuştur.

*Anahtar kelimeler: Çok amaçlı optimizasyon, Pareto optimal, Baskınlık, çözüm kümesi.*

# Usage of Pareto Optimal in Multi Objective Optimization Problems

In today's real life problems, we encounter optimization problems which have more than one purposes. Solving multi objective optimization problems is more difficult than solving single objective optimization problems. Level of difficulty increases even more in multi objective optimization problems especially when there are conflicting objectives. Attempting to maximize one objective while minimizing the other increases the complexity of the problem. In multi objective problems while the decision problem is being set up, it could be difficult to create the objective function. More than one critera are the subject when it comes to evaluating the quality of solution in most of the decision

[1] İletişim kurulacak yazar: Serkan KAYA, Harran Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Endüstri Mühendisliği Bölümü, Osmanbey Kampüsü, ŞANLIURFA, serkankaya@harran.edu.tr, Tel:0.414.3181042 Fax:0.414.3183799

problems. It might not be possible to put these criteria together with objective function. When more than one criteria are taken into consideration and when these criteria contradict with each other, different solution alternatives might come into question.
One of the classical methods used in multi objective optimization problems is combining objectives according to performance criterion. Solution is found by turning multi objective problem into single objective problem through combining different objectives under one value. The most common method for subsuming under single performance is weighting every single objective and turn them into single objective function. Second method for the solution of multi objective problems is changing objectives each time and finding a solution. It is solving as multi objective problem by changing objective function for each solution through turning the rest of the objectives into constraints. İt is important to determine the order of preference correctly since it affects the resolution process. The third method used in multi objective optimization problems is pareto optimal method. Here, dominance concept comes up which enables preference between a vector that includes all objectives and solutions. When compared to other methods, there are less studies that attempt to achieve various solution sets through pareto optimization method for solution of multi objective problems. In this study pareto dominance concept which enables decision maker make a selection among results in multi objective optimization problems is introduced. Superior sides of this method are revealed by performing an application on sample problem.

*Keywords: Multi objective optimization, Pareto optimal, Dominance, Solution set.*

## Optimizasyon

Optimizasyon temel olarak, eldeki kısıtlı kaynakların optimum kullanımını gerçekleştirmektedir. Optimizasyon matematiksel olarak, bir amaç fonksiyonunu verilen tanım aralığında optimum yapan değerini bulmaktır. Yöneylem araştırması ve işletme yönünden, bir sistemi en düşük maliyetle en yüksek verimi elde etmek üzere düzenleme yapılması olarak tanımlanabilir Fığlalı (2008, s. 2). Optimizasyon temelde modelleme ve çözümleme olarak iki alt bileşenden oluşur. Modelleme, gerçek hayatta karşılaşılan bir problemin matematiksel olarak ifade edilmesidir. Çözümleme ise modelin çeşitli yöntemler kullanılarak en iyi sonucunun alınmasıdır.
Model, bir sistemin değişen şartlar altında davranışlarını incelemek, kontrol etmek ve geleceği hakkında varsayımlarda bulunmak üzere elemanları arasındaki bağlantıları matematiksel olarak ifade etmektir. Eğer karar değişkenleri üzerinde herhangi bir kısıtlama yoksa kısıtsız model, en azından bir kısıtlama varsa kısıtlı modeller haline gelir. Genellikle gerçek hayat problemleri kısıtlı problemlerden oluşur. Ele alınan optimizasyon problemi, sadece bir dönem için çözülecekse statik model, birden fazla dönem göz önünde bulundurularak çözülecekse dinamik model haline gelir. Problemde tek amaç en iyilenmeye çalışılıyorsa tek amaçlı, birden fazla amaç aynı anda en iyilenmeye çalışılıyorsa çok amaçlı problem halini alır. Eğer optimizasyon problemindeki karar değişkenleri pozitif reel değerler alıyorsa, sürekli optimizasyon problemi söz konusu olur. Tüm karar değişkenleri tamsayı değerler alması gerekiyorsa kesikli optimizasyon problemi ortaya çıkar. Problemde bazı karar değişkenlerinin reel bazılarının tamsayı alması gerekiyorsa karışık kesikli optimizasyon problemi söz konusu olur. Karar değişkenlerinin kombinatoryal seçenekleri söz konusu ise kombinatoryal optimizasyon problemleri ortaya çıkar.
Optimizasyon problemlerinin çözümleme alt bileşeninde ise, dinamik modeller için kullanılan yaklaşım dinamik programlamadır. Eğer optimize edilecek birden fazla amaç varsa genellikle kullanılan yaklaşım hedef programlamadır. Modeldeki tüm fonksiyonların doğrusal olması

durumunda sürekli optimizasyon problemleri doğrusal programlama yöntemi ile çözülür. Sürekli optimizasyon modelinde en azından bir fonksiyonun doğrusal olmaması durumundaysa doğrusal olmayan programlama yöntemi kullanılır. Eğer kesikli optimizasyon problemlerinde karar değişkenleri herhangi bir tamsayı değer alıyorsa tamsayılı programlama yöntemi kullanılır. Kombinatoryal optimizasyon problemlerinin belirli bir boyuta kadar olanı tamsayılı programlama yöntemi ile çözülürken, orta ve büyük boyutlu problemlerin sezgisel ve metasezgisel yöntemlerle çözülmesi gerekmektedir Fığlalı (2008, s. 8).

Kombinatoryal optimizasyon problemleri genellikle tanımlanması kolay, fakat çözülmesi çok zor olan problemlerdir. Buna göre, algoritmaların hesaplama gereksinimleri ve pratikte karşılaşılan problemler zor veya kolay olarak sınıflandırılmıştır. Problemin zorluk derecesinin bilinmesi problemin çözümü için en iyi yöntemin uygulanmasını sağlar. Hesap karmaşıklığı teorisi, pratikte karşılaşılan problemlerin algoritmaları ve önemli örneklerin her ikisinin de hesaplamalarının sınıflandırılmasını konu alır. Eğer belirli bir problemin her örneğini çözecek bir polinom zaman algoritması geliştirilebilirse, kombinatoryal optimizasyon problemlerinin bu sınıfı kolay olarak adlandırılır ve P ile gösterilir. Polinom zaman algoritmalarının çözümlenmesi, incelenmesi kolaydır ve bu algoritmalar sorunu kısa sürede çözüme ulaştırır Biroğul (2005, s. 14). Eğer bir problem için o problemi çözecek etkili algoritmalar bulunamazsa, bu problem zor olarak adlandırılır. Polinom zaman algoritması ile çözülemeyen zor problemler veya üstel işlem zamanı gerektiren problemler, üstel zaman algoritması ile ele alınır. Deterministik olmayan algoritmalar yardımıyla polinom zamanda çözülebilen karar problemlerinin sınıfı NP (Non-Deterministic Polynomial Time) sınıfı olarak adlandırılır. NP, NP-Tam (NP-Complete) olarak adlandırılan problemlerin bir alt kümesini içerir. Bu alt kümedeki, her bir problem, NP sınıfına aittir. Eğer bu problem için etkili bir algoritma mevcutsa, NP sınıfındaki her bir problem için etkili bir algoritma mevcuttur. (Örneğin P=NP). Bunun anlamı, NP-Tam sınıfı problemlerinin NP sınıfındaki en zor problem sınıfı olmasıdır. Eğer NP sınıfındaki bütün problemler polinom olarak bir probleme indirgenebilirse, bu problem NP-Zor (NP-Hard) sınıfına aittir denir. Başka bir deyişle, eğer bir problem NP-Zor sınıfına aitse, sadece P=NP olan bir polinom zaman algoritması ile çözülebilir. Bu problem sınıfları arasında $P \subseteq NP$ ve NP-Tam $\subseteq$ NP şeklinde bir ilişki vardır Kundakçı (2013, s. 67-68).

Sezgisel kelimesi eski Yunancadan “heuriskein” kelimesinin karşılığı olarak, problemleri çözmek için yeni yöntemler geliştirme anlamının karşılığıdır Aladağ (2009, s. 6). Optimizasyon problemlerinde sezgisel, optimale yakın sonuçlar bulan, stratejilere dayalı, hızlı ve pratik bir çözüm olarak kabul edilmektedir. Problem optimum çözümü bulunamayacak kadar karmaşıksa, sezgisel yöntemler sezgiye veya bazı deneysel kayıtlara dayanan karar kuralları ile belirli sayıda adımdan sonra en iyi olmasa da tatminkar bir sonuç verirler.

Büyük boyutlu kombinatoryal optimizasyon problemlerine kesin yöntemlerle çözüm bulmak mümkün olmadığından bu tür problemlerin çözümünde sezgisel algoritmalar tercih edilmektedir. Sezgisel algoritmalar en iyi sonucu garanti etmemekle beraber, kısa sürede optimale yakın sonuçlar verirler.

Klasik sezgisel yöntemler genellikle probleme özgü bir yapıya sahiptirler. Bir problem türü için geliştirilen sezgisel bir yöntemin başka bir probleme türüne uygulanması zordur. Ancak son yıllarda problem özelliklerinden bağımsız, genel olarak tanımlanmış ve meta sezgisel olarak adlandırılan yöntemlere ilgi artmıştır.

Kennedy ve Eberhart (2001) meta sezgisel yöntemleri zor ve karmaşık optimizasyon problemlerde kaliteli çözümlere ulaşabilmek için sezgisel yaklaşımları kullanan tasarımlar olarak tanımlamışlardır. Çözüm uzayının büyüklüğü ya da optimizasyon modelindeki değişken ve kısıt sayılarının fazlalığı nedeniyle kesin sonuç alınan yöntemlerin kullanılamadığı durumlarda, uygulamaya elverişli olmayan problemlerin çözümünde, meta

sezgisellerin kullanılması giderek yaygınlaşmaktadır. Aydın'a (2009) göre kesin sonuçların alındığı yöntemlerden farklı olarak meta sezgiseller, optimum yerine optimuma yakın çözümler elde edilmesini sağlar.
Meta sezgisel yöntemlerin klasik sezgisel yöntemlere göre en büyük avantajı, meta sezgisel yöntemlerin temel adımlarının genel olarak tanımlanmış olması, probleme özgü tasarlanmamış olmaları ve her türlü optimizasyon problemlerine uygulanabilir olmalarıdır. Ancak meta sezgisel yöntemlerin sezgisel yöntemler gibi en iyi sonucu garanti etmemeleri meta sezgisel yöntemlerin en önemli dezavantajıdır.

**Çok Amaçlı Optimizasyon**

Performans kriterinde birden fazla amacın sistematik ve eş zamanlı olarak optimize edilmesi çok amaçlı optimizasyon olarak adlandırılır. Çok amaçlı optimizasyon problemlerinde, karar probleminin modeli kurulurken amaç fonksiyonunun oluşturulması zor olabilir. Karar problemlerinin bir çoğunda çözümün kalitesini değerlendirmek için birden fazla kriter söz konusudur. Bu kriterleri tek bir amaç fonksiyonunda toplamak her zaman olanaklı olmayabilir. Birden fazla kriterin söz konusu olduğu, özellikle bu kriterlerin birbirleriyle çeliştiği problemlerde farklı çözüm alternatifleri söz konusu olur.
Çok amaçlı optimizasyon problemlerinde birden fazla çözüm söz konusudur. Bu tür problemlerin çözümünde tek amaçlı problemlerin çözümlerinde kullanılan algoritmaları kullanmak bazen çözüm uzayının yeteri kadar taranamaması, iyi sonuçlar alınamaması gibi sonuçlara yol açabilmektedir. Araştırmacılar, çok amaçlı problemlerin çözümlerinde etkin sonuçlara ulaşabilmek için çözüm uzayının tamamını kapsayacak şekilde yöntemler geliştirmişler ve bunları çözüm algoritmalarına adapte etmişlerdir. Örneğin, çok amaçlı optimizasyon probleminde amaçlar tek bir amaçta birleştirilir. Bu tür yöntemlere, sabit ağırlıklı amaç işlevi ve değişken ağırlıklı amaç işlevi örnek olarak verilebilir. Bu tür yöntemler pareto tabanlı olmayan yöntemlerdir. Aşağıda çok amaçlı optimizasyon yöntemlerinden en çok kullanılanları hakkında bilgi verilecek daha sonra Pareto Optimal anlatılacaktır.

**Sabit Ağırlıklı Amaç Fonksiyonu**

Sabit ağırlıklı amaç fonksiyonu, birden fazla amacı, tek amaç altında birleştirir ve tek amaçlı problem haline getirir. (Michalewicz, 1994; Murata ve Ishibuchi, 1995) Amaçlara verilen farklı ağırlık değerleri, farklı pareto çözümlerin elde edilmesini sağlar. Birden fazla pareto optimal çözümün bulunabilmesi için, çözüm algoritmasının birden fazla çalıştırılması gerekir. Sabit ağırlıklı amaç fonksiyonu yöntemi, Denklem 1' de görüldüğü gibi tek amaç fonksiyonu altında birleştirilir. Denklem 2' de verilen $w_1, w_2, \ldots, w_n$, n adet amaç için ağırlıklardır ve bu ağırlıkların toplamı 1 olmak zorundadır.

$$F(x) = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \ldots + w_n f_n(x) \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \quad (2)$$

Sabit ağırlıklar ($w_i$) ayarlanarak, çözüm algoritmasının, çözüm uzayını arama yönü ayarlanabilir. Sabit ağırlıklı amaç fonksiyonu yönteminde bir veya birden fazla amacın ağırlık değeri yüksek verilerek, arama uzayında belirli bir yönde hareket etmesi sağlanabilir. Burada karar verici en önemli gördüğü amacın ağırlık değerini daha yüksek tutarak, elde etmek istediği sonuçlara ulaşacak şekilde arama uzayının taranmasını sağlayabilir.

**Değişken Ağırlıklı Amaç Fonksiyonu**

Değişken ağırlıklı amaç fonksiyonu ilk kez (Murata ve Ishibuchi, 1995; Ishibuchi ve Murata, 1998) tarafından sabit ağırlıklı amaç fonksiyonu yöntemindeki eksikleri gidermek için oluşturulmuştur. Değişken ağırlıklı amaç fonksiyonu yönteminde, rastgele seçilmiş ağırlık değerleri kullanılır. Sabit ağırlıklı amaç fonksiyonu yöntemi arama uzayında tek bir yönde arama yaptığından pareto çözüm kümesini bulmak için yeterli değildir. Çünkü çok amaçlı optimizasyon problemlerinde, çözüm uzayında farklı arama yönlerine ihtiyaç vardır. Bu eksikliği gidermek, çok amaçlı problemlerde farklı arama yönlerini gerçekleştirebilmek için değişken ağırlıklı amaç fonksiyonu yöntemi geliştirilmiştir.
Değişken ağırlıklı amaç fonksiyonu yönteminde yukarıda verilen Denklem 1 ve 2'ye ek olarak aşağıda verilen Denklem 3 şartı da sağlanmalıdır. Bu yöntemde ağırlıklar sabit olmadığından çözüm uzayında tek yönde arama yerine farklı yönlerde arama yapar.

$$w_i = \frac{rasgele_i}{rasgele_i + rasgele_2 + \cdots + rasgele_n}, i=1,2,.,n \quad (3)$$

**Vektör Hesaplamalı Genetik Algoritma**

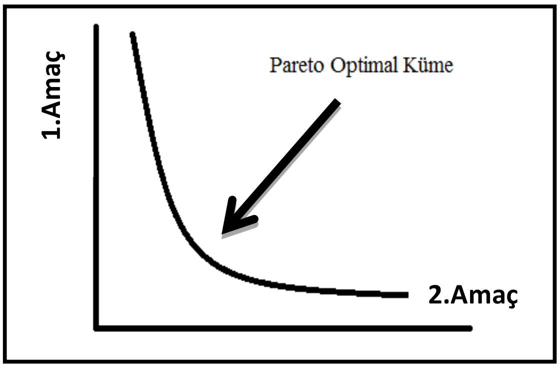
Vektör hesaplamalı genetik algoritma, çok amaçlı bir Genetik algoritma tasarlanması için atılan ilk adımdır Schaffer (1984). Vektör hesaplamalı genetik algoritma, bir sonraki popülasyonun alt kümesinin bir tek amaç tarafından seçilmesi ve gelecek popülasyonun oluşturulması için tüm alt kümelerin birlikte kullanılmasıdır. Bu şekilde gelecek popülasyon her amacın en iyi bireylerinden oluşmaktadır. Yöntemde n adet amaç varsa, algoritmanın bulunduğu iterasyondan n adet alt topluluk seçilir. Her alt topluluk, bir amaç fonksiyonunun en iyi değerlerinden oluşur ve her bir alt topluluk bir sonraki iterasyonun yalnızca bir bölümünü oluşturur. Yeni iterasyon, bir önceki iterasyonda oluşturulan alt kümelerin birleşimidir.
Vektör hesaplamalı genetik algoritma, Denklem 4 ve 7 arasında verildiği gibi, amaç fonksiyonlarının doğrusal birleşimi gibi çalışır. Mevcut iterasyondan alt topluluklar oluşturulurken verilen denklemlerdeki eşitlikler kullanılır. F(x) fonksiyonu, her alt topluluk seçimi için tek bir amaç tarafından belirlenir.

$$F(x)=1f_1(x)+0f_2(x)+\ldots+0f_n(x) \quad (4)$$
$$F(x)=0f_1(x)+1f_2(x)+\ldots+0f_n(x) \quad (5)$$
$$F(x)=0f_1(x)+0f_2(x)+\ldots 1f_{n-1}(x)+0f_n(x) \quad (6)$$
$$F(x)=0f_1(x)+0f_2(x)+\ldots 0f_{n-1}(x)+1f_n(x) \quad (7)$$

Vektör hesaplamalı genetik algoritma pareto tabanlı bir yaklaşım olmayıp, pareto çözüm üreten bir yöntemdir Ergül (2010, s. 73). Belirli bir amaç fonksiyonu tarafından seçilen her bir alt topluluk, daha sonra birleştirilir ve çözüm için kullanılan optimizasyon yönteminin adımlarına uygulanır.

**Pareto Optimal**

Çok amaçlı optimizasyon problemleri birden fazla amacın eş zamanlı en iyilenmesidir. Çok amaçlı optimizasyonda amaç fonksiyonları genellikle istenen bir sonucun farklı bir özelliğini dikkate alır. Çoğu zaman bu amaçlar, tüm fonksiyonları eş zamanlı olarak optimize eden tek bir sonucun bulunmadığı bir çelişki içerisindedirler. Bundan dolayı bir optimal çözümler kümesi söz konusu olur. Bu küme pareto optimallik kavramında, pareto optimal küme olarak adlandırılır. İki amaçlı optimizasyon problemine ait pareto optimal kümesi Şekil 1' de gösterilmiştir.




*Şekil 1. Pareto optimal küme*

Çok amaçlı optimizasyon problemlerinde çözüm bir vektördür. Bundan dolayı çok amaçlı optimizasyon problemi aşağıdaki gibi bir vektör minimizasyonu olarak da ifade edilebilir:

Min: $\{z_1(x), z_2(x), \ldots.. z_N(x)\}$ (8)

Kısıtlar:

$f_i(x) = z_i(x)$ $i=1,2,\ldots,N$ (9)

$g_j(x) \leq 0$ $j=1,2,\ldots J$ (10)

$h_k(x)=0$ $k=1,2,\ldots K$ (11)

Denklem 8 çözüm alanı, Denklem 9 F(x) amaç fonksiyonu vektörü, x karar değişkenleri, Denklem 10 $g_j(x)$ eşitsizlik ve Denklem 11 $h_k(x)$ eşitlik kısıtlarını ifade etmektedir. Tek amaçlı optimizasyon problemlerinde tek amaç fonksiyonu değeri vardır. Çok amaçlı optimizasyon problemlerinde ise, tek amaçlı optimizasyondan farklı olarak; tek amaç fonksiyonu yerine amaç fonksiyonu vektörünün olmasıdır. Bu sebepten dolayı çok amaçlı optimizasyon problemleri bazen vektör optimizasyonu olarak da adlandırılmaktadır. Ayrıca amaç fonksiyonu ve kısıtların tiplerine göre, çok amaçlı doğrusal programlama modeli, çok amaçlı doğrusal olmayan programlama modeli, çok amaçlı tam sayılı programlama modeli şeklinde sınıflandırmalarda yapılabilmektedir. En iyi sonuç vektörünün belirlenmesi, vektörlerin sıralanarak seçilmesini kapsayan bir küme teorisi problemidir. Optimal çok amaçlı çözümler, pareto optimal olarak adlandırılan bu kümeler olarak tanımlanır.

Çok amaçlı optimizasyon problemlerinde tek amaçlı optimizasyon problemlerinde olduğu gibi tek global bir çözüm olmadığından, amaç fonksiyonlarına uygun olarak, bir çözümler kümesinin belirlenmesi gerekir. Bu durumda optimal bir noktanın belirlenmesi için, pareto optimalde baskın ve basılgın kavramlarının ortaya konulması gerekir.

Baskınlık: Çok amaçlı fonksiyonun bir vektörü $F(x^*) \in Z$, eğer; $F(x) \leq F(x^*)$ iken en az bir amaç için $F_i(x)<F_i(x^*)$ şartını sağlayan bir diğer $F(x) \in Z$ vektörü yok ise $F(x^*)$ vektörü baskındır.

Basılgınlık: Çok amaçlı fonksiyonun bir vektörü $F(x^*) \in Z$, eğer; $F(x) \leq F(x^*)$ iken en az bir amaç için $F_i(x)<F_i(x^*)$ şartını sağlayan bir diğer $F(x) \in Z$ vektörü var ise $F(x^*)$ vektörü basılgındır.

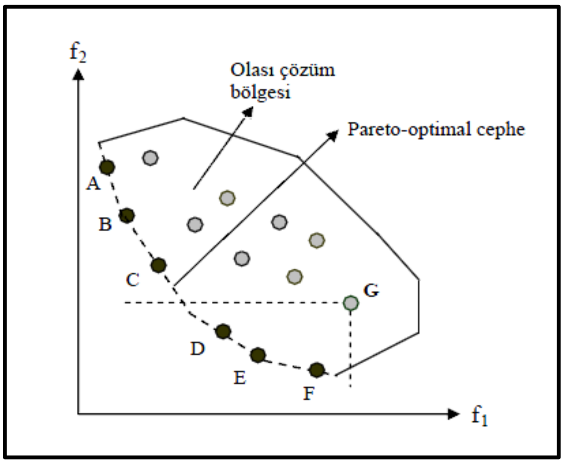
Eğer Z çözüm alanında diğer noktalar bir çözüm noktasına baskın değilse bu çözüm noktası basılgın çözüm olarak adlandırılır. Diğer çözümler tarafından baskılanmamış olan tüm çözümler pareto optimal çözümlerdir. Dolayısıyla, bir $x^*$ çözümü için eğer amaç fonksiyonlarının herhangi birisi diğer amaç fonksiyonunu bozmadan iyileştirilemiyorsa $x^*$ pareto optimaldir.

Pareto optimalde baskın, basılgınlık ifadeleri bir başka şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir; Örneğin; U ve V iki amaçlı minimizasyon probleminin iki farklı çözüm vektörü olsun:

- Eğer $V_i<U_i$, $i=1,2,\ldots,j$ ise V vektörü U vektörüne baskındır.
- Eğer $V_i \leq U_i$, $i=1,2,\ldots,j$ ve en az bir i için $V_i<U_i$, ise V vektörü U vektörüne baskındır.

- Eğer $V_i > U_i$, i=1,2,…,j ise V vektörü U vektörüne göre basılgındır.
- Eğer $V_i$ vektörü $U_i$ vektörüne baskın değil ve/veya $U_i$ vektörü $V_i$ vektörüne baskın değilse $U_i$ ve $V_i$ vektörleri karşılaştırılamaz.

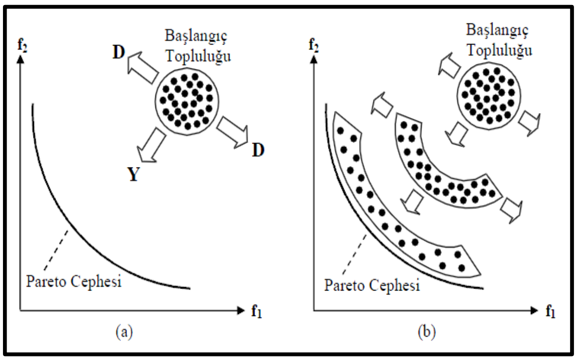
Şekil 2 bireyler arasındaki baskınlık ilişkisini göstermektedir. İki amaçlı minimizasyon probleminde; A, B, C, D, E, ve F noktaları pareto optimal bireyleri veya baskın çözümleri, bu bireylerden oluşan $P^*=\{A,B,C,D,E,F\}$ pareto optimal kümeyi ve pareto optimal cepheyi göstermektedir. G noktası basılgın çözümdür Ergül (2010, s. 58).




*Şekil 2. Pareto optimal cephe.*

Pareto optimal çözümlerde baskın ve basılgın çözümler arasındaki fark, çözüm prosedürü için önem arz etmektedir. Bir çözüm, diğer bir çözümden bütün kriterler açısından daha kötü ise bu çözüm kuvvetle basılgındır. Eğer bir çözüm bazı kriterler açısından diğer çözümden kötü, ancak en az bir kriter için diğer çözüm kadar iyi ise bu çözüm basılgındır. Eğer bir çözüm diğer bir çözümden bütün kriterler açısından daha iyi ise bu çözüm kuvvetle baskın bir çözümdür. Çok amaçlı optimizasyon problemlerinde kuvvetle baskın çözümleri elde etmek, baskın çözümleri elde etmekten daha zordur. Bazı kombinatoryal problemlerinin çözüm uzayında kuvvetle baskın çözümlere ulaşmak çok zordur. Bu tür durumlarda, kuvvetle baskın çözümler yerine, baskın çözümlere ulaşmak daha kolay olmaktadır. Özellikle birbirleriyle çelişen çok amaçlı optimizasyon problemlerinde bu tür durumlara daha çok rastlanmaktadır.
Pareto optimal cephe, çok amaçlı çözüm uzayında bulunan, diğer çözümler tarafından baskılanmamış yani baskın çözümleri kapsar. Pareto optimizasyon, pareto optimal cephenin ve buna en yakın komşuların bulunmasını amaçlar. Çok amaçlı optimizasyon problemlerinde pareto optimizasyonun kullanılmasının sebebi; problemlerin, sadece bir tek global optimuma sahip olmaması ve amaçlarla ilgili tercihlere arama prosesinden önce karar verilememesidir. Pareto optimizasyonda amaçlara ilişkin tercihler değişse bile, karar mekanizmasının elinde birden fazla alternatif olması seçimi kolaylaştırmaktadır. Çok amaçlı optimizasyonda göz önüne alınması gereken bir diğer durum ise bir problemde birbirleri ile çelişen amaçların yer almasıdır. Ancak çelişen amaçlara rağmen, pareto'ya dayalı modern sezgisel yöntemler, bütün kriterler için ideal çözümler bulabilmektedirler Özbakır (2004, s. 26).
Tek amaçlı optimizasyon problemlerinde bir tek en iyi sonuç vardır ve çözümler en iyiden en kötüye doğru sıralanabilir. Çok amaçlı optimizasyon problemlerinde ise, bir tek en iyi çözüm yerine pareto optimal çözümler olarak adlandırılan, birden fazla en iyi çözüm vardır. Çok amaçlı optimizasyon problemleri çözüm kümesinde bir amaca göre iyi olan çözüm, diğer amaca göre kötü olabilir. Çok amaçlı optimizasyon problemlerinin asıl amacı, pareto cephesini bulmak veya yaklaşmak ve bu cephe üzerinde düzgün bir dağılım sağlayarak, karar

vericiye alternatif karar seçenekleri sunmaktır. Bu amaçlar, Şekil 3'te çok amaçlı minimizasyon problemi için gösterilmektedir. Şekil 3a'da D düzgün dağılım veya çeşitliliği, Y yakınsamayı temsil etmek üzere, çözüm kümesinin düzgün dağılımının arttırılabilmesi için başlangıç popülasyonu D yönünde hareket ettirilmelidir. Pareto cephesine yakınsama için başlangıç popülasyonunun Y yönünde hareket ettirilmesi gerekir. Problemde düzgün dağılım ve yakınsama arasındaki denge doğru olarak ayarlandığında Şekil 3b'de görüldüğü gibi iyi bir çözüm kümesi elde edilir Ergül (2010, s.59).




*Şekil 3. (a) Başlangıç popülasyonu, (b) Çözüm kümesi*

**Örnek Uygulama**

Çok amaçlı optimizasyon problemlerinde, bir çözümün tüm amaçlara göre en iyi olması çok zordur. Bu tür çözümler ideal çözüm olarak adlandırılır. Genellikle bir tek çözüm yerine çözüm kümesinden bahsedilir. Bu çözümlere Pareto (veya baskın) çözüm denilmektedir. Çok amaçlı optimizasyon teorisinin esas yapısı, basılgın çözümleri çözüm kümesinden eleyerek baskın olan iyi çözümlere ulaşmayı amaçlar.

Araştırmacılar çok amaçlı problemleri, genelde ağırlıklandırarak tek amaçlı problem haline getirerek çözümler elde etmişlerdir. Bu durumda karar verici için alternatif çözümler olmamaktadır. Tek bir amaç haline getirilerek elde edilen optimal sonuç gerçek yaşam problemlerinde karar verici için gerçekçi veya uygulanabilir sonuç içeremeyebilir. Bu nedenle karar verici için alternatif çözümlerin yer aldığı çözümler kümesi daha çok tercih edilir. Yine literatürde çok amaçlı problemlerin çözümünde karar vericiye alternatif çözümler üreten sonuçların alındığı pareto optimal algoritması sıkça kullanılmaktadır.

Bu bölümde çok amaçlı esnek atölye tipi çizelgeleme problemlerinin çözümü için geliştirilen parçacık sürü optimizasyonu ve yerel arama algoritmalarının melezlenmesiyle elde edilen algoritma ile 15 iş, 10 makine ve 56 operasyondan oluşan NP-Zor kapsamındaki çizelgeleme problemi çözülmüştür. Problem maksimum tamamlanma zamanı ($C_{max}$), maksimum iş yükü ($W_m$) ve toplam iş yükü ($W_t$) olmak üzere 3 amaçlı olarak ele alınmıştır. Problemin çözümünde öncelikle her seferinde amaçlar değiştirilerek tek amaçlı olarak sonuçlar alınmıştır. Daha sonra pareto optimal algoritması çözüm algoritmasına adapte edilerek sonuçlar alınmıştır. Tablo 1.'de her iki çözüme ait sonuçlar verilmiştir. Her seferinde amaçların değiştirilmesi ile 3 sonuç elde edilebilirken, pareto optimal algoritması ile karar vericinin çözümler arasından tercihini yapabilmesini sağlayacak şekilde 6 adet sonuç alınmıştır.

*Tablo 1 Problem çözümünde elde edilen sonuçlar*

| | Her seferinde amaçların değiştirilmesi | | | Pareto Baskın Sonuçlar | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cmax | 12 | 14 | 12 | 13 | 14 | 12 | 13 | 12 | 11 |
| Wtop | 94 | 91 | 97 | 92 | 91 | 93 | 94 | 96 | 98 |
| Wmax | 12 | 13 | 11 | 13 | 13 | 12 | 11 | 11 | 11 |
| TOPLAM | 118 | 118 | 120 | 118 | 118 | 117 | 118 | 119 | 120 |

## Sonuç Ve Öneriler

Çok amaçlı optimizasyon problemleri son yıllarda oldukça ilgi görmektedir. Gerçek hayatta sıkça karşılaşılan üretim planlama, iş çizelgeleme, proje çizelgeleme, araç rotalama, yatırım planlama ve tesis planlama gibi alanlarda birçok başarılı uygulamaları görülmektedir.
Çok amaçlı optimizasyon problemlerinde araştırmacılar genellikle sabit ve değişken ağırlıklı amaç fonksiyonlarını kullanarak problemi tek amaçlı duruma getirerek çözümler elde etmişlerdir. Ancak bu yöntemler karar vericiye, problemi yetersiz bir şekilde modelleme, tek bir çözüm üretme, seçenekleri sınırlandırma gibi dezavantajlar getirmiştir. Son yıllarda bu tür yöntemlerin yerine pareto optimal algoritmasının kullanımı artmıştır. Yakın zamanda yapılan çalışmalar, pareto optimalin çok amaçlı optimizasyon problemlerinin çözümünde en etkili yöntem olduğunu ve diğerlerine üstünlüklerini göstermiştir.
Çok amaçlı problemlerde, çoğu zaman amaçlar birbirleriyle çatışmakta ve bütün amaçları en iyileyen tek bir çözüm genelde bulunmamaktadır. Bu durumda, karar vericilerin çözümler üzerindeki tercihi önem kazanmakta olup, tüm çözüm uzayını temsil edebilecek uygun çözümlerin bulunmasında Pareto optimal başarıyla uygulanabilmektedir. Araştırmacılar için çok amaçlı optimizasyon problemlerinin çözümünde pareto optimal kullanmaları önerilmektedir.

## Kaynakça

Özbakır, L. (2004). *Çok objektifli esnek atölye çizelgeleme problemlerinin sezgisel yöntemlerle modellenmesi: analizi ve çözümü, Doktora Tezi.* Kayseri: Erciyes Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü.
Aladağ, Ç. (2009). *Yapay Sinir Ağlarının Mimari Seçimi İçin Tabu Algoritması, Doktora Tezi.* Ankara: Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
Aydın, A. (2009). *Metasezgisel yöntemlerle uçak çizelgeleme problemi optimizasyonu, Doktora Tezi.* İstanbul: Marmara Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü.
Biroğul, S. (2005). *Genetik Algoritma Yaklaşımıyla Atölye Çizelgeleme, Yüksek Lisans Tezi.* Ankara: Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
Ergül, E. (2010). *Çok amaçlı genetik algoritmalar: temelleri ve uygulamaları, Doktora Tezi.* Samsun: Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
Fığlalı, A. (2008). Optimizasyona giriş. *Optimizasyon Seminerleri Dizisi*, (s. 2-27). Kocaeli.

Ishibuchi, H., & Murata, T. (1998). A Multi-Objective Genetic Local Search Algorithm and Its Application to Flowshop Scheduling. *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics* , 392-403.

Kennedy, J., & Eberhart, R. (2001). *Swarm intelligence.* San Francisco: CA:Morgan Kaufmann Publishers.

Kundakçı, N. (2013). *Üretim Sistemlerinde Dinamik İş Çizelgeleme Problemlerinin Sezgisel Yöntemlerle Çözülmesi, Doktora Tezi.* Denizli: Pamukkale Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Michalewicz, Z. (1994). *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs.* Berlin: Springer-Verlag.

Murata, T., & Ishibuchi, H. (1995). MOGA: Multiobjective Genetic Algorithms. *2nd IEEE International Conference on Evolutionary Computation*, (s. 289-294). Perth, Australia.

Schaffer, J. (1984). *Some Experiments in Machine Learning Using Vector Evaluated Genetic Algorithms, PhD Thesis.* Nashville, ABD: Vanderbilt University.